

EFEKTIVITA KAPITÁLOVÝCH TRHŮ: FRAKTÁLNÍ DIMENZE, HURSTŮV EXPONENT A ENTROPIE

Ladislav Křišťoufek, Miloslav Vošvrda, Ústav teorie informace a automatizace, AV ČR, v.v.i., Institut ekonomických studií FSV UK*

1. Úvod

Koncept efektivity kapitálových trhů je centrálním pojmem v teorii finančních trhů. Pojem je všeobecně užívaný pro vyjádření ideálního obrazu takového kapitálového trhu, který umožňuje zpracovávat relevantní informace pro generování fundamentální ceny cenného papíru. Jestliže relevantní informace pro generování fundamentální ceny je zpracována beze zbytku cenovým mechanismem kapitálového trhu, potom takový kapitálový trh je nazývaný efektivní. Tedy efektivnost kapitálových trhů akcentuje informační efektivnost kapitálových trhů. Pojem efektivity kapitálových trhů reprezentuje takový kapitálový trh, kde ceny obchodovaných cenných papírů, tj. akcií, bondů a cenných papírů, vždy reflektují všechny známé informace a kde investoři jsou zcela racionální a přístrojově vybaveni adekvátním způsobem. Takže pojem efektivity kapitálových trhů reprezentuje formu spravedlivé hry. Investor nemůže mít žádnou výhodu v predikování výnosů investice, protože žádný z nástrojů predikce nenese informaci, která by byla komukoliv přínosná. To znamená, že investoři na efektivních kapitálových trzích nemohou očekávat dosahování enormních výnosů systematicky. Jinými slovy, kapitálový trh je efektivní, jestliže fluktuace výnosů jsou nepredikovatelné (Fama, 1970, Malkiel, 2003).

Samotné měření efektivnosti kapitálových trhů se od svých počátků potýká s problémem dvojí hypotézy, tedy pokud zamítneme efektivnost daného trhu, může to být způsobeno špatným předpokladem o skutečném chování daného trhu. Tento problém byl uznán i otcem hypotézy efektivních trhů Eugenem Fama (Fama, 1991). V tomto článku se tento problém pokusíme obejít tím, že o efektivním trhu předpokládáme, že procesy na něm pozorované jsou martingalem. Použijeme pak metod fraktální dimenze, Hurstova exponentu (dlouhé paměti procesu) a entropie k popsání efektivity daného trhu.

Hurstův exponent je již dlouhodobě zkoumán pro různé finanční produkty jako akciové indexy (Di Matteo *et al.*, 2007 a Křišťoufek, 2010a), úrokové míry (Cajueiro a Tabak, 2007), dluhopisy (Carbone *et al.*, 2004), směnné kurzy (Vandewalle *et al.*, 1997) a další. Abychom byli schopni odhadnout fraktální dimenzi přes Tsallisovu

* Poděkování: výzkum byl realizován za podpory grantů GAČR 402/09/0965, GAUK 118310 a SVV 261 501.

Množina $\{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}$ je někdy nazývána informačním tokem a $\{S_t\}_{t \geq 0} \in M$ je obvykle prostor cen indexů cenných papírů. Kapitálový trh $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_{t \geq 0}\}, P)$ je nazýván efektivním, jestliže $E[\Delta S_t \Delta S_{t+k}] = 0$, kde $\Delta S_{t+k} \equiv S_{t+k} - S_{t+k-1}$. Takže efektivita kapitálových trhů se obvykle měří na indikátoru martingalové difference výnosů cenných papírů.

3. Vztah efektivního kapitálového trhu, fraktální dimenze, dlouhé paměti a entropie

Prostor časových řad fluktuací popsaných v předešlé kapitole může být generován pomocí Brownova pohybu, a prostor mnoha prostorů časových řad takových fluktuací může být generován pomocí nějakého směřovacího mechanismu Brownových pohybů rušených procesem Lévyho schodů (flights). Předpokládejme teoretický model efektivního kapitálového trhu s Brownovým pohybem. Asymptoticky obdržíme normální rozdělení výnosů, a empirické rozdělení výnosů bude asymptoticky velmi blízko k normálnímu rozdělení. Ve vícerozměrném teoretickém modelu efektivního kapitálového trhu s vícerozměrným Brownovým pohybem obdržíme asymptoticky vícerozměrné normální rozdělení výnosů a vícerozměrnou empirickou distribuci výnosů, které bude asymptoticky velmi blízko k vícerozměrnému normálnímu rozdělení. Tedy vícerozměrné empirické rozdělení výnosů směřuje asymptoticky k vícerozměrnému normálnímu rozdělení.

Pro n -rozměrné normální rozdělení má hustota n -rozměrného normálního rozdělení ve výběrovém prostoru $n-1$ rozměrný kulový charakter. V tomto případě jsou investiční výnosy stejné pro všechny investiční horizonty, a povrch tohoto prostoru bude tedy hladký. Proto paradoxně dosažení ideálního efektivního kapitálového trhu umožňujícího efektivní alokaci kapitálu nepřináší žádnou motivaci investorům, a ani nedává žádný prostor spekulantům. Reálné zkušenosti s kapitálovými trhy však ukazují, že existují investoři, kteří hledají na trzích diskrepance od ideálního stavu. Tato diskrepance vytváří hrubnutí povrchu tohoto prostoru.

Míra hrubosti povrchu D spojená s $n-1$ rozměrnou koulí je nazývána fraktální dimenze. Tedy fraktální dimenze $D \in (n-1, n)$ pro nadrovinu v \mathcal{R}^n je lokální vlastnost. Dlouhodobá závislost v časových řadách fluktuací cen na kapitálových trzích je spojována s mocninným zákonem korelací. Tento fakt je často nazýván Hurstovým efektem a je měřen Hurstovým exponentem H . Dlouhodobá paměť je globální vlastnost. Proto D a H jsou nezávislé jedna na druhé. Pro sebe-afinní reprezentace dynamických cenových procesů¹ na kapitálových trzích platí, že lokální vlastnosti, jako je stádovost a strach, jsou reflektovány v globálních vlastnostech a vyhovují relaci $D + H = n + 1$. Pro $n = 1$ dostaneme známý vztah $D + H = 2$.

¹ Sebe-afinní procesy jsou takové procesy s diferencemi X_t pro $-\infty < t < \infty$, pro které platí

$X(t_0 + \tau) - X(t_0) \rightarrow h^{-H} (X(t_0 + h\tau) - X(t_0))$ pro všechna t_0 , kladné h , kladnou časovou škálu τ a nezáporný parametr H (Mandelbrot a van Ness, 1968). H v tomto předpisu se ne nutně shoduje s Hurstovým exponentem u dlouhé paměti.

4.2 Hurstův exponent

Hurstův exponent H , $0 < H < 1$, je charakteristickou mírou pro dlouhou paměť v časových řadách, který popisuje asymptoticky hyperbolický pokles autokorelační funkce, $\rho(k) \propto k^{2H-2}$, kde k je zpoždění. Pokud platí $H > 0,5$, pak je řada persistentní a následuje lokální trendy. Naopak pro $H < 0,5$ je řada anti-persistentní a mění znaménko častěji, než bychom očekávali pro náhodný proces. Celkově odchylka od $H = 0,5$ implikuje možnou arbitráž a obchodní strategie s nadprůměrnými rizikově očištěnými zisky, jelikož autokorelace v časové řadě klesají velice pomalu (Mandelbrot a van Ness, 1968). Z mnoha odhadů Hurstova exponentu používáme ty nejpopulárnější – detrendovanou flukтуаční analýzu (detrended fluctuation analysis, DFA), metodu přeškálovaných rozsahů (rescaled range analysis, RS), detrendující klouzavé průměry (detrending moving average, DMA) a výškovou korelační analýzu (height-height correlation analysis, HHCA).

4.2.1 R/S

Metoda přeškálovaných rozsahů je nejtradičnejší, tedy nejstarší, metodou, která byla navržena Hurstem (1951). Z časové řady $X(t)$, kde $t = 0, 1, \dots, T$, vezmeme první diference a získáme novou řadu. Pro délku v rozdělíme řadu na T/v částí a v každé části odhadneme směrodatnou odchylku S . V každé části sestavíme profil řady, tedy kumulované odchylky od průměru dané části. Následně spočteme rozsah R profilu, tedy rozdíl mezi maximem a minimem řady. Pro sebepodobné procesy přeškálovaný rozsah R/S_v škáluje dle pravidla $R/S_v \propto v^H$. Pro dělení období na jednotlivé subperiody v dělíme stejným způsobem jako v metodě DFA podle Kantelhardt *et al.* (2002), pro lepší srovnatelnost výsledků.

4.2.2 DFA

Detrendovaná flukтуаční analýza, navržena Pengem *et al.* (1994), je založená na škálování rozptylů detrendované řady. Podobně jako pro R/S sestavíme profil řady pro části o délce s a pro profil odhadneme polynomiální trend $X_s(t)$. Sestavíme detrendovanou řadu $Y_s(t) = X(t) - X_s(t)$. Fluktuace $F_{DFA}^2(s)$, které jsou definované jako průměr střední čtvercové chyby lineárního odhadu přes všechny části řady o délce s , škálují podle vzorce $F_{DFA}^2(s) \propto s^{2H}$ (Kantelhardt *et al.*, 2002). Podle standardních doporučení používáme s v rozsahu hodnot $s_{min} = 5$ a $s_{max} = T/5$.

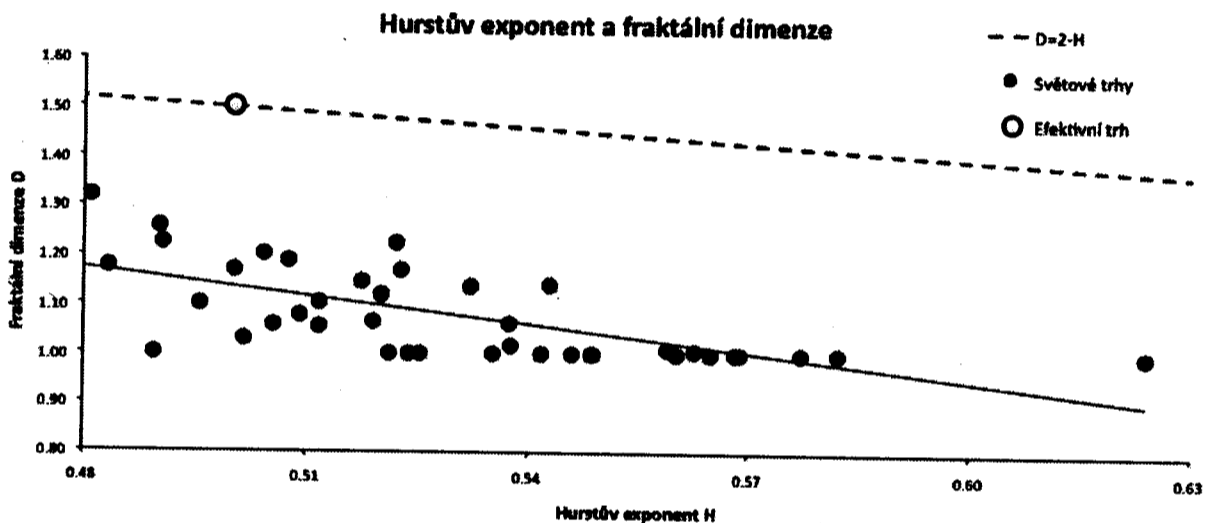
4.2.3 DMA

Detrendující klouzavé průměry (Alessio *et al.*, 2002) jsou založené na filtrování přes klouzavé průměry. Pro velikost okna klouzavého průměru λ sestrojíme centrováný klouzavý průměr $\bar{X}_\lambda(t)$ pro každý bod řady $X(t)$. Podobně jako pro DFA definujeme fluktuaci $F_{DMA}^2(\lambda)$ jako střední čtvercovou chybu mezi $X(t)$ a $\bar{X}_\lambda(t)$, která pak škáluje podle vzorce $F_{DMA}^2(\lambda) \propto \lambda^{2H}$. Jelikož používáme centrováný klouzavý průměr jako

5. Výsledky

Zkoumáme efektivitu 41 akciových trhů, které jsou popsány v tabulce 1. Tento soubor pokrývá indexy americké, západoevropské, východoevropské, asijské i africké. Databáze byla získána z veřejných stránek www.dukascopy.com a obsahuje hodnoty akciových indexů od počátku roku 2000 do konce srpna 2011 (kromě případů, kdy hodnoty indexů začínají až po roce 2000). Zkoumané období tedy obsahuje jak roky stabilního růstu, tak periody dlouhodobých poklesů po splasknutí bubliny okolo internetových firem, tedy „DotCom bubble“, a současnou krizi. V tabulce 2 jsou popsány základní popisné statistiky pro všechny zkoumané indexy a jejich logaritmické „close-close“ výnosy (průměr, minimální a maximální hodnoty, směrodatnou odchylku, šikmost, nadměrnou špičatost a KPSS test pro stacionaritu). Většina indexů je negativně vychýlených a všechny jsou leptokurtické. Stacionaritu zamítáme pouze pro akciový index Srí Lanky (CSE). V případě CSE tedy nebudeme hovořit o dlouhé paměti, ale o škálování rozptylu. Pro testování stacionarity uvádíme pouze výsledky pro KPSS test, s použitím standardního ADF testu zamítáme jednotkový kořen pro všechny indexy.

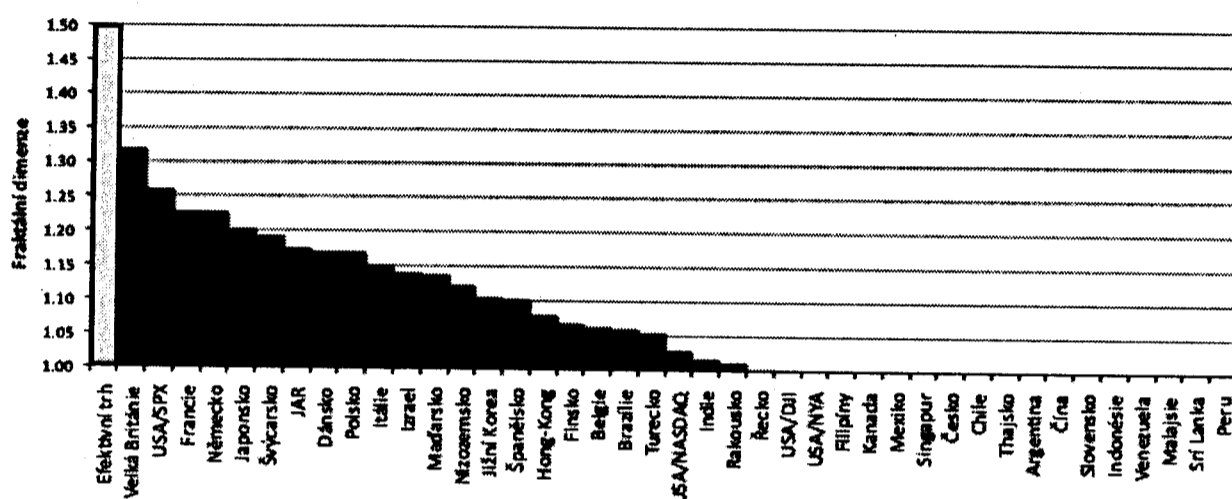
Obrázek 1
Hurstův exponent a fraktální dimenze



Zaměřme se nyní na konkrétní výsledky. Začneme s výsledky pro fraktální dimenzi a Hurstův exponent. Jak bylo dříve v textu uvedeno, pro sebe-afinní procesy platí $D = 2 - H$. Vztah mezi H a D je vyobrazen v obrázku 1. Zřetelně pozorujeme, že vztah mezi dvěma hodnotami je záporný, nicméně neodpovídá předpisu pro sebe-afinní procesy. Na druhou stranu tyto dvě míry na sobě nejsou nezávislé. Můžeme tedy tvrdit, že procesy výnosů akciových indexů nejsou sebe-afinní. Zjišťujeme ale, že přenos mezi lokálními a globálními vlastnostmi v dynamice zde částečně existuje. Tedy lokální paniky či stádní chování se částečně přenáší i do globálních vlastností zkoumaných časových řad. Další implikací je to, že má smysl zkoumat D a H odděleně, protože nám každé poskytuje jinou informaci.

Podle odhadů Hurstova exponentu vidíme, že hlavním důvodem neefektivity amerických indexů není persistence či anti-persistence řad (obrázek 3). Všechny čtyři zkoumané akciové indexy z USA jsou velice blízko hranice $H = 0,5$, tedy nekorelované. Tři z indexů (DJI, NYA a SPX) jsou dokonce pod touto hranicí, což ukazuje velmi slabé znaky anti-persistence ($H = 0,4760$, $H = 0,5016$, $H = 0,4895$ a $H = 0,4902$ postupně pro DJI, NASD, NYA a SPX). Postupný pokles korelací tedy není důvodem vysokého indexu efektivity pro tyto americké indexy. Velice blízko hodnotě pro efektivní trh jsou indexy Polska ($H = 0,5003$), USA (NASD) a Japonska ($H = 0,5042$). Na opačném chvostu pořadí jsou indexy Peru ($H = 0,6239$), Srí Lanky ($H = 0,5822$), Malajsie ($H = 0,5772$), Venezuely ($H = 0,5690$), Indonésie ($H = 0,5682$) a Slovenska ($H = 0,5649$).

Obrázek 4
Fraktální dimenze pro jednotlivé akciové indexy



V porovnání s výsledky podle Hurstova exponentu nám dávají odhady fraktální dimenze D zajímavější informace (obrázek 4). Všechny indexy mají $D < 1,5$, tedy mají nižší fraktální dimenzi než zcela náhodný proces. Taková dimenze signalizuje, že na lokální úrovni časové řady často trendují, dochází tedy ke střídání býčích a medvědí fází, což však odporuje definici efektivního trhu. Jak již bylo naznačeno dříve, tato lokální vlastnost se však přenáší do globálních charakteristik jenom částečně. Nejbližší hodnotě fraktální dimenze pro náhodný proces je opět britský FTSE ($D = 1,3165$), následován americkým SPX ($D = 1,2578$), francouzským DAX ($D = 1,2252$), německým DAX ($D = 1,2251$) a japonským NIKKEI ($D = 1,1997$). Nutno podotknout, že přesto, že jsou tyto hodnoty pro zkoumané akciové indexy nejlepší, jsou stále nezanedbatelně vzdálené od ideální hodnoty $D = 1,5$. Co je však zářející – více jak polovina zkoumaných indexů má hodnotu fraktální dimenze rovnu jedné, tedy jejich odhad byl menší či roven jedné. Takový výsledek signalizuje, že tyto indexy podléhají intenzivnímu stádovému chování. Pokud se opět zaměříme na indexy USA, tak kromě SPX, který je mezi indexy s nejvyšší fraktální dimenzí, má fraktální dimenzi vyšší než jedna pouze NASD, ostatní dva americké indexy mají odhad fraktální dimenze

byly nezávislé, jejich závislost má pouze jinou strukturu, než se předpokládá pro sebe-a-finní procesy. Za druhé, u většiny indexů je odchylka od efektivního trhu dominována lokálními neefektivnostmi, tedy střídáním býčích a medvědích trhů, stádních reakcí na zprávy a podobně. Toto chování se projevuje v míře fraktální dimenze, ale nepřenáší se dostatečně silně do globální dynamiky, tedy Hurstova exponentu. Za třetí, nejefektivnějším trhem ze zkoumaných indexů je britský FTSE následovaný indexy ostatních vyspělých zemí (SPX, CAC, DAX a NIKKEI). Toto „vítězství“ britského indexu je stvrzeno všemi měřítky, která jsme použili, resp. v každém z nich je velmi blízko hranici pro efektivní trh. Za čtvrté, kromě SPX jsou tři další zkoumané americké akciové indexy (DJI, NASD a NYA) výrazně neefektivní v porovnání s ostatními indexy vyspělých ekonomik a skončily uprostřed pořadí. Tento výsledek je způsoben hlavně nízkou fraktální dimenzí těchto indexů, tedy neefektivním chováním na lokální úrovni. Na globální úrovni jsou tyto indexy podle Hurstova exponentu naopak velmi blízko efektivnímu trhu. A naposledy, mezi nejméně efektivní trhy patří ty jihoamerické (Argentina, Venezuela, Chile a Peru), společně s některými asijskými (Malajsie a Srí Lanka) a Slovenskem.

Literatura

- ALESSIO, E.; CARBONE, A.; CASTELLI, G.; FRAPPIETRO, V. 2002. Second-Order Moving Average and Scaling of Stochastic Time Series. *European Physical Journal B*. 2002, Vol. 27, No. 2, pp. 197–200
- BARABASI, A.; SZEPEFALUSY, P.; VICSEK, T. 1991. Multifractal Spectra of Multi-Affine Functions. *Physica A*. 1991, Vol. 178, pp. 17–28
- BARUNÍK, J.; KRIŠTOUFEK, L. 2010. On Hurst Exponent Estimation under Heavy-Tailed Distributions. *Physica A*. 2010, Vol. 389, pp. 3844–3855
- CAJUEIRO, D.; TABAK, B. 2007. Long-Range Dependence and Multifractality in the Term Structure of LIBOR Interest Rates. *Physica A*. 2007, Vol. 373, pp. 603–617
- CARBONE, A.; CASTELLI, G.; STANLEY, H. E. 2004. Time-Dependent Hurst Exponent in Financial Time Series. *Physica A*. 2004, Vol. 344, pp. 267–271
- COSTA, U.; LYRA, M.; PLASTINO, A.; TSALLIS, C. 1997. Power-Law Sensitivity to Initial Conditions within a Logisticlike Family of Maps: Fractality and Nonextensivity. *Physical Review E*. 1997, Vol. 56, pp. 245–250
- DI MATTEO, T. 2007. Multi-Scaling in Finance. *Quantitative Finance*. 2007, Vol. 7, No. 1, pp. 21–36
- FAMA, E. 1970. Efficient Capital Markets: A Review of Theory and Empirical Work. *Journal of Finance*. 1970, Vol. 25, No. 2, pp. 383–417
- FAMA, E. 1991. Efficient Capital Markets: II. *Journal of Finance*. 1991, Vol. 46, No. 5, pp. 1575–1617.
- GNEITING, T.; SCHLATHER, M. 2004. Stochastic Models that Separate Fractal Dimension and the Hurst Effect. *SIAM Review*. 2004, Vol. 46, No. 2, pp. 269–282
- HURST, E. 1951. Long-Term Storage Capacity of Reservoirs. *Transactions of American Society of Civil Engineering*. 1951, Vol. 116, pp. 770–808
- KANTELHARDT, J.; ZSCHIEGNER, S.; KOSCIELNY-BUNDE, E.; HAVLIN, S. BUNDE, A.; STANLEY, H. E. 2002. Multifractal Detrended Fluctuation Analysis of Nonstationary Time Series. *Physica A*. 2002, Vol. 316, pp. 87–114

Příloha

Tabulka 1 Akciové indexy

Zkratka	Index	Země
AEX	Amsterdam Exchange Index	Nizozemsko
ASE	Athens Stock Exchange General Index	Řecko
ATX	Austrian Traded Index	Rakousko
BEL20	Euronext Brussels Index	Belgie
BSE	Bombay Stock Exchange Index	Indie
BUSP	Bovespa Brasil Sao Paulo Stock Exchange Index	Brazílie
BUX	Budapest Stock Exchange Index	Maďarsko
CAC	Euronext Paris Bourse Index	Francie
CSE	Chittagong Stock Exchange Index	Srí Lanka
DAX	Deutscher Aktien Index	Německo
DJI	Dow Jones Industrial Average Index	USA
FTSE	Financial Times Stock Exchange 100 Index	Velká Británie
HEX	OMX Helsinki Index	Finsko
HSI	Hang Seng Index	Hong Kong
IBC	Caracas Stock Exchange Index	Venezuela
IGBM	Madrid Stock Exchange General Index	Španělsko
IGRA	Peru Stock Market Index	Peru
IPC	Indice de Precios y Cotizaciones	Mexiko
IPSA	Santiago Stock Exchange Index	Chile
JKSE	Jakarta Composite Index	Indonésie
JSE	Africa All Share Index	JAR
KFX	Copenhagen Stock Exchange Index	Dánsko
KLSE	Bursa Malaysia Index	Malajsie
KS11	KOSPI Composite Index	Jižní Korea
MERVAL	Mercado de Valores Index	Argentina
MIBTEL	Borsa Italiana Index	Itálie
NASD	NASDAQ Composite Index	USA
NIKKEI	NIKKEI 225 Index	Japonsko
NYA	NYSE Composite Index	USA
PSE	Philippine Stock Exchange Index	Filipíny
PX	Prague Stock Exchange Index	Česko
SAX	Slovakia Stock Exchange Index	Slovensko
SET	Stock Exchange of Thailand Index	Thajsko
SPX	Standard & Poor's 500 Index	USA
SSEC	Shanghai Composite Index	Čína
SSMI	Swiss Market Index	Švýcarsko
STRAITS	Straits Times Index	Singapur
TA100	Tel Aviv 100 Index	Izrael
TSE	Toronto Stock Exchange TSE 300 Index	Kanada
WIG20	Warsaw Stock Exchange WIG 20 Index	Polsko
XU100	Istanbul Stock Exchange National 100 Index	Turecko